# Oppgavesamling i matematikk

## Grunnskolelærerutdanning 1-7

Repetisjonsoppgaver knyttet til matematikkfaglige temaer som er aktuelle ved skriftlig eksamen i Matematikk 1

Geir Martinussen og James Gray

Høgskolen i Oslo og Akershus
Fakultet for lærerutdanning
Institutt for grunnskole- og faglærerutdannning

HiOA Tema 2016 nr 1

ISSN 1893-0425 (trykt)
ISBN 978-82-93208-98-3 (trykt)
ISBN 978-82-8364-001-4 (pdf)

Opplag trykkes etter behov, aldri utsolgt

HiOA,
Læringssenter og bibliotek,
Skriftserien
St. Olavs plass 4,
0130 Oslo,
Telefon (47) 64 84 90 00

Postadresse:
Postboks 4, St. Olavs plass
0130 Oslo

Adresse hjemmeside: http://www.hioa.no/Om-HiOA/Nettbokhandel
For elektronisk bestilling klikk Bestille bøker

Trykket hos Allkopi
Trykket på Multilaser 80 g hvit

# Innhold

# 1 Introduksjon

Kjære leser!

Oppgavene og notatene i denne samlingen er ment som supplement til oppgavene i pensumlitteraturen – ikke i stedet for. Oppgavene er tilpasset som eksamensforberedelse for skriftlig eksamen i GLU 1-7 kurset Matematikk 1. Oppgavene ble i utgangspunktet utviklet av oss i vårt arbeid med studenter i andre klasse, som ønsket flere oppgaver som repetisjon for denne eksamenen.

Vi har tatt med notater om brøkregning (side 8) og om figurtall (side 22).

Finner dere feil i fasiten, eller i teksten ellers, er det fint om dere melder fra til Geir.Martinussen@hioa.no eller James.Gray@hioa.no

Vi ønsker dere lykke til – både med oppgaveløsning og med skriftlig eksamen!

Mars 2016

Hilsen James og Geir

# 2 Repetisjonsoppgaver til Del 1 på skriftlig eksamen

## 2.1 Oppgaver relatert til Del 1

1. Skriv riktig tall i rutene:

   a) $638 = 6 \cdot 100 + \square \cdot 10 + \square \cdot \square$

   b) $18{,}9 = 1 \cdot \square + \square \cdot 1 + \square \cdot \square$

   c) $2{,}04 = 2 \cdot 1 + \square \cdot \square + \square \cdot \square$

   d) $115{,}027 = 1 \cdot \square + 1 \cdot \square + \square \cdot 1 + \square \cdot \square + \square \cdot 0{,}01 + \square \cdot \square$

   e) Skriv et tall som har 6 på tusenplass, 2 på tierplass, 4 på hundredelsplass og ellers 0.

   f) Skrive 4100023,45 med bokstaver.

   g) Skriv tolvmillionertolvtusenogtolvogtolvhundredeler som desimaltall.

   h) Lag og løs liknende oppgaver…

2. Løs divisjonsoppgavene, og lag og løs liknende oppgaver samt multiplikasjonsoppgaver. (Du kan f.eks. multiplisere kvotienten med divisoren, og sjekker at du får dividenden.)

   a) $3483{,}3 : 17 =$

   b) $348364 : 3{,}4 =$

   c) 0,00413:0,059=

3. Regn ut:

   a) halvparten av $\frac{4}{7}$

   b) fire femdeler av en seksdel

   c) $\frac{2}{3}$ av $\frac{1}{8}$

   d) $\frac{4}{6}$ av 4,5 millioner

   e) en tidel av 0,056

   f) Lag og løs liknende oppgaver

4. Skriv:

   a) 0,33 som brøk og prosent

   b) 1,34 som prosent og brøk

   c) $\frac{3}{5}$ som desimaltall og prosent

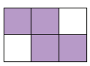
   d) $2\frac{1}{3}$ som prosent og desimaltall

   e) 14 % som brøk og desimaltall

   f) 222,2 % som desimaltall og brøk

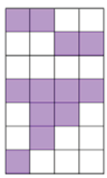
5. Hvor mye er skravert? Svar i prosent, brøk og desimaltall:

   a) 

   b) 

   c) 

   d) 

   e) 

6. Legg en tidel til:

   a) 1,91 b) 20,04 c) 9,999 d) 82,92

   Legg en hundredel til:

   e) 2,99 f) 19,09 g) 100,001

   Lag og løs liknende oppgaver. Legg også oppgaver med brøker, som $\frac{2}{10}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{4}{5}$ osv.

7. Regn ut

   a) Førpris 1200 kr. Nå 840 kr. Antall prosent avslag?

   b) Koster 690 kr uten moms. Pris med 25 % moms?

   c) Kostet 960 kr på salg. Var da satt ned 40 %. Hva var førpris?

   d) Lag oppgaver med prosent «alle veier».

8.

   a) $10{,}07\ \text{mm}^2 =$ ________ $\text{cm}^2$

   c) $40{,}1\ \text{m}^3 =$ _________ $\text{dm}^3$

   b) $100{,}8\ \text{cm}^2 =$ ________ $\text{dm}^2$

   d) $4000\ \text{mm}^2 =$ ________ $\text{dm}^2$

   e) 4 hektoliter + 20 liter + 0,4 dl + 400 cl = ______ liter

   f) Lag og løs liknende oppgaver.

9. Sett inn på tall-linje:

   a) $-2 \quad 1\frac{1}{6} \quad \frac{1}{4}$

   b) $-0{,}75 \quad 1\frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} \quad -\frac{1}{4}$

10. Hvilket tall? (i desimaltall, prosent og brøk)

   a) 

   b) 

   c) 

   d) Lag og løs liknende

11.

   a) Hva er høyden i en pyramide med kvadratisk grunnflate med sider 3 cm når volumet er $18\ \text{cm}^3$?

   b) Hva er volumet av ei kjegle der diameter i grunnflata er 6 cm og høyden er 9 cm?

   c) Hva er diameter i en sylinder når volumet er 15,7 l og høyden er 50 cm?

   d) Hva er sidelengdene i en kube når volumet er $\frac{1}{27}\ \text{dm}^3$?

   e) Hva er arealet av grunnflata i et prisme med volum $35\ \text{cm}^3$ og høyde 25 mm?

   f) Lag og løs liknende oppgaver.

12. Gir disse oppgavene samme innbydes resultat?

   a) $(33 \cdot 42): 60$ og $33 \cdot (42: 60)$

   b) $(40: 160): 20$ og $40: (160 \cdot 20)$

   Her vil det lønne seg å sammenlikne med oppgaver med enklere tall, som

   c) $(3 \cdot 4): 12$ og $3 \cdot (4: 12)$

   d) $(12: 2): 3$ og $12: (2 \cdot 3)$

så ser du «sammenhengen».

e) Lag og løs liknende oppgaver.

13.

a) Betaler 156 kr for 1,2 kg. Kilopris?

b) Koster 264 kr pr kg. Hva koster 0,4 kg?

c) Betaler 144 kr for 0,6 kg. Hva koster 1,3 kg?

d) Lag og løs liknende oppgaver.

14.

a) $-4 - 3 \cdot (7 - 12) =$

b) $(-17 + 3{,}5) \cdot 4 - 3 =$

c) $120 - (130 - 14 \cdot 1{,}5) =$

d) Får du det til, kan du gjerne lage regnefortellinger.

e) Lag og løs liknende oppgaver.

15.

a) Klassifiser geometriske figurer. For eksempel er et kvadrat både parallellogram, rektangel, drake, trapes, rombe.
Er et parallellogram også et trapes? Er det også et rektangel (kan det være?)? osv.

b) Lag liknende spørsmål til hverandre.

16. Tegn et rektangel med

a) $O = 0{,}1$ m og $A = 6\ \text{cm}^2$

b) $O = 240$ mm og $A = 36\ \text{cm}^2$

c) $O = 1\frac{2}{3}$ cm og $A = \frac{1}{6}\ \text{cm}^2$

d) $O = 16$ cm og $A = 16\ \text{cm}^2$

e) Lag og løs liknende oppgaver.

17.

a) Finn høyden til ei rombe med omkrets 20 cm og areal 1500 $\text{mm}^2$.

b) Lag og løs liknende oppgaver.

18. Regneartene

a) $0{,}0001 + 2{,}976402$ b) $1001{,}04 - 2{,}651$ c) $235 \cdot 34$

d) $8{,}02 \cdot 0{,}9$ e) $0{,}24 : 0{,}04$ f) $26000 : 104$

19. Skriv neste tall

a) 0,3 0,6 0,9 … b) 9,907 9,908 9,909 … c) 0,7 0,8 0,9 …

d) 1,304 1,306 1,308 … e) 14,35 14,65 14,95 …

20. Begrunn hvilken brøk/hvilket tall er størst av:
    a) trettitre tusendeler og fire hundredeler
    b) tjuetre hundredeler og fire tideler

21. Regn ut – forkort hvis mulig
    a) $\frac{2}{4} \cdot \frac{6}{4}$ b) $\frac{1}{4} \cdot 2\frac{3}{7}$ c) $\frac{3}{2} : 3$ d) $\frac{9}{4} : \frac{3}{7}$ e) $\frac{1}{2} : \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2}\right)$
    f) $\left(\frac{1}{2} : \frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{5}$ g) $\frac{3}{15} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} : 5$ h) $\frac{4}{5}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\right)$ i) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$
    j) $4\frac{1}{5} + \frac{5}{6}$ k) $\frac{6}{7} + \frac{1}{8}$ l) $\frac{3}{5} - \frac{2}{3}$ m) $1\frac{1}{3} - \frac{1}{2}$
    n) Gi eksempel på en brøk mellom I: $\frac{1}{2}$ og $\frac{2}{3}$ II: $\frac{1}{7}$ og $\frac{2}{7}$
    o) Regn ut I: en firedel av en seksdel II: to femdeler av tre åttedeler

22. Prosentregning
    a) Ei bukse kostet 600 kr. Da var det gitt 25 % avslag. Hva var førprisen?
    b) Ei klokke kostet 680 kr. Så ble prisen satt ned med 15 %. Hva ble ny pris?
    c) Ei veske var satt ned med 20 %. Avslaget var 480 kr. Hva kostet veska opprinnelig?

23. Brøk – prosent – desimaltall
    a) Skriv 75 % som brøk og desimaltall b) Skriv $\frac{4}{5}$ som desimaltall og prosent
    c) Skriv 0,4 som brøk og prosent

24. (Mer) parentesregning
    a) $(5 - 7{,}5) \cdot (4{,}5 - 2{,}5) - 12$ b) $6 \cdot (6 + 8{,}4)$ c) $(3 - 5{,}5) \cdot 2 - 7$

25. Geometri, omkrets – areal – volum
    a) Arealet til et rektangel er 48 $cm^2$. Den ene siden er 12 cm. Hvilken lengde har de andre?
    b) Et kvadratet har arealet 25 $cm^2$. Hva er omkretsen?
    c) Finn arealet i en trekant med grunnlinje 5 cm og høyde 4 cm.
    d) Hva er volumet til en sylinder med diameter 4 cm og høyde 3 cm?
    e) Et prisme har volumet 0,1 $m^3$ og en grunnflate på 20 $dm^2$. Regn ut høyden.
    f) Et rektangel har arealet 56 $cm^2$. Finn sidene når den ene siden er 1 cm lengre enn den andre.

26. Omgjøring mellom enheter
    a) $14{,}01\ dm^2 =$ ______ $cm^2$ b) $12{,}5\ m^2 =$ _____ $dm^2$ c) $0{,}14\ m =$ _____ dm
    d) $0{,}33\ L =$ ______ dL e) $9{,}5\ cm^2 =$ _____ $mm^2$ f) $0{,}1\ m^3 =$ _____ $dm^2$
    g) $3\ dm^3 =$ _____ dL h) $0{,}025\ m^2 =$ _____ $cm^2$ i) 9 hg + 20 g = _____ kg
    j) 12 m + 14 mm = ____ dm k) $2\ dm^3 + 70\ cm^3 =$ ____ L l) 80 dL + 40 mL = _____ L
    m) 2 m + 4 dm + 30 mm = _____ cm n) 2 L + 4 dL + 30 cL = ____ L

27. Tall i stigende rekkefølge:
    a) 0,12 0,212 0,1201 0,012 0,102 0,1002
    b) 0,402 0,42 0,375 1,2 0,85
    c) 0,64 0,604 0,6 0,069 0,641
    d) 0,41 − 0,041 0,4103 0,1041 − 0,401 0,4

e) $\frac{4}{8}$ $\frac{23}{24}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{10}{16}$ f) $\frac{3}{7}$ $\frac{6}{7}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{33}{35}$

28. Hilken brøk er størst? Begrunn svaret.
    a) $\frac{57}{58}$ og $\frac{58}{59}$ b) $\frac{79}{80}$ og $\frac{69}{70}$

29. Posisjonssystemet – riktig tall i rutene:
    a) $314 = 3 \cdot 100 + \boxed{\phantom{0}} \cdot 10 + 4 \cdot 1$ b) $3{,}04 = 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot \boxed{\phantom{0}}$
    c) $1025 = 1 \cdot 1000 + \boxed{\phantom{0}} \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 1$ d) $6{,}7 = 6 + \boxed{\phantom{0}}$

30. Prosentregning
    a) An får 30 % rabatt på ei bukse som kostet 1200 kr. Hvor mye må hun betale?
    b) Ba kjøper ei pakke for 2800 kr. Da har han fått 20 % avslag. Hva var opprinnelig pris?
    c) Caro kjøper ny smarttelefon. Han får 800 kr i rabatt. Det tilsvarer 25 % av opprinnelig pris. Hva kostet telefonen opprinnelig, og hva må han betale?

31. Proporsjonalitetsregning
    a) 0,6 kr pærer koster 9 kg. Hva er prisen pr. kg?
    b) Druene kostet 30 kr pr. kg. Hvor mye koster 0,7 kg?
    c) Prisen for poteter var 15 pr. kg. Hvor mye koster 1,6 kg?

32. Algebra
    a) På et fat ligger appelsiner, bananer og epler, til sammen 18 stykker. $\frac{1}{6}$ er appelsiner. Hvor mange bananer er det når det er tre ganger så mange epler som appelsiner?
    b) I en skuff ligger 16 løse sokker, som er like store og egentlig er par av svarte og hvite sokker. $\frac{1}{4}$ av sokkene er svarte, resten er hvite. Hvor mange par hvite er det?
    c) Ane og Bea leker med klinkekuler. Ane har 15 klinkekuler. Hvor mange har de til sammen når Bea har $\frac{4}{7}$ av det totale antallet?

## 2.2 Notat: Multiplikasjon og divisjon av brøk[1]

Her vil vi behandle multiplikasjon og divisjon av brøk, med særlig vekt på hvilke kontekster vi kan bruke og hvordan vi kan illustrere brøkregning med tegninger. Vi tror at mange av problemene med brøkregning kommer av at man for tidlig gir slipp på konkretiseringene, slik at elevene blir sittende å regne med brøk uten å ha forståelse.

Før man jobber med multiplikasjon og divisjon av brøk bør man naturligvis ha en viss forståelse for brøkbegrepet, forkorting og utvidelse av brøker og for overgang mellom blandet tall og uekte brøk. Dette går vi ikke inn på her.

Regning med brøk er et område hvor det kan være spesielt nyttig å gå fram i gradvise skritt – for eksempel å dividere med stambrøker (brøker med 1 i teller) før man går videre til å dividere med alle mulige brøker. Derfor vil vi gå stegvis til verks.

### 2.2.1 Målings- og delingsdivisjon

Før vi går videre, vil vi gjøre rede for forskjellen på målings- og delingsdivisjon som modeller for divisjon.

Eksempel: To tredeler skal deles på seks. Uttrykket blir

$$\frac{2}{3} : 6$$

En passende tekstoppgave kan være: «To tredels pizza skal deles på seks personer (resten har den sultne Tjodrik spist opp). Hvor mye (hvor stor del) får hver av de seks av hele pizzaen?»

Regner vi ut, finner vi at hver får en nidels pizza. Merk at vi hadde to tredels *pizza* og svaret ble en nidels *pizza.* Vi fikk samme benevning i svaret som vi hadde i oppgaven. Dette er et eksempel på *delingsdivisjon*. Vi kan spørre: Hvor *mye* fikk hver – av det vi hadde? (Dette kan også illustreres med tegning, og det kommer vi tilbake til om litt.)

Snur vi på uttrykket foran, får vi $6 : \frac{2}{3}$.
Her er det vanskelig å lage en tilsvarende regnefortelling/oppgave som ovenfor.

Vi kunne sagt at: «Det går med seks kg gressfrø for å så inn to tredeler av plenen. Hvor mye trengs til hele plenen?» (Da ville vi hatt nok et eksempel på delingsdivisjon.)

Vi stiller i stedet spørsmålet slik: «Vi har seks kg sukker. Det skal legges i poser som hver tar to tredels kg. Hvor mange poser blir det?»

Det viser seg at de fleste elever synes den siste tilnærmingsmåten er enklest å forholde seg til. Her blir svaret 9 poser. Merk at her har vi 6 *kg* sukker. I svaret fikk vi 9 *poser*. Vi spurte om *hvor mange*. Vi får altså *ikke* samme benevning som vi hadde i utgangspunktet (derimot har vi samme benevning på dividend og divisor). Dette er et eksempel på *målingsdivisjon*. Vi måler opp *hvor mange* det blir.

Andre eksempler på målingsdivisjon til dette stykket er: «Du har 6 meter tau som skal deles i biter på to tredels meter hver. Hvor mange taubiter blir det?» eller «Du har seks liter vann som skal deles i flasker på to tredels liter hver. Hvor mange flasker blir det?»

---

[1] Denne teksten, forfattet av Geir Martinussen og Bjørn Smestad, var trykket i Tangenten 1-2010

### 2.2.2 Multiplikasjon av brøker

For å multiplisere brøker bruker vi regelen $\frac{\text{teller}\cdot\text{teller}}{\text{nevner}\cdot\text{nevner}}$. Det viser seg at mange elever blander sammen med addisjon og starter med å finne fellesnevner, og det kan tyde på at regelen ikke er forstått godt nok. Da er det viktig at man forstår at det å multiplisere med en brøk handler om å ta en brøkdel av «noe». Og vi trenger eksempler – relatert til en virkelighet elever kan kjenne seg igjen i!

#### *2.2.2.1 Eksempeloppgave*

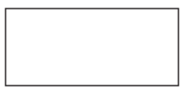
$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$$

Tekstoppgave: Du får tredjeparten av en halv sjokolade. Hvor mye får du av hele sjokoladen? (Det blir det samme om du får halvparten av en tredjedels sjokolade.)

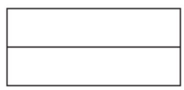
Vi kan tegne løsningen. Vi deler sjokoladen i to. Av denne halvparten får vi en tredel.

La elevene tegne selv før løsningen presenteres for dem:

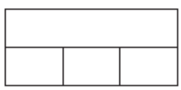
Her er sjokoladeplata:



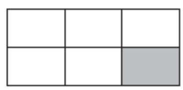
som vi deler i to:



Også deler vi den ene halvparten i tre:



Da ser vi at en tredel av halvparten blir:



en sjettedel $\left(\frac{1}{6}\right)$ av hele plata.

Og $\frac{1}{6}$ er selvsagt det samme som vi får hvis vi bruker regneregelen «direkte».

La elevene lage tilsvarende eksempler for hverandre, også uten at det er stambrøker (brøker der teller er lik 1). La dem også prøve seg med blandet tall/uekte brøk.

#### *2.2.2.2 Eksempeloppgave*

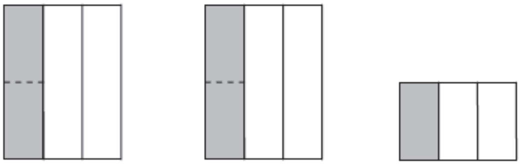
Forklar geometrisk (ved tegning) hvorfor

$$\frac{1}{3}\cdot 2\frac{1}{2} \quad \text{eller} \quad 2\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} \quad \text{blir } \frac{5}{6}.$$

Hva er en passende tekstoppgave til disse uttrykkene?

Tekstoppgave: Du får en tredel av to og en halv liter brus. Hvor mye brus får du? Merk at oppgaven også kunne vært: To og en halv liter brus skal deles på tre personer; hvor mye får hver? Oppstillingen på den siste blir: $2\frac{1}{2} : 3$ som jo tilsvarer $2\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$. Dette kan være en illustrasjon på sammenhengen mellom multiplikasjon og divisjon.

Vi tegner de to og en halv liter brus, deler både literne og halvliteren i tre og krysser av for hvor mye «vi får». Vi har satt inn en stiplet linje i hver av de stiplete tredelene – for å markere at en tredel er det samme som to seksdeler:



Altså får vi fem seksdels liter.

### 2.2.3 Divisjon der brøk inngår

Regelen om at man skal multiplisere med den omvendte brøken viser seg også vanskelig å huske for elevene. For eksempel lurer elevene på om de like gjerne kan snu den første brøken. Dette tyder på at det er mangler i forståelsen, og igjen tror vi at det å jobbe med tegninger og med situasjoner som er forståelige, vil kunne hjelpe. Og det er viktig å ha begrepene delingsdivisjon og målingsdivisjon klart for seg.

#### *2.2.3.1 Eksempeloppgave*

Hva blir $\frac{2}{3} : 4$? Lag en tekst til oppgaven.

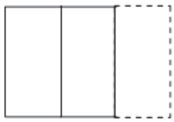
Eksempel på tekst: To tredeler av et eple deles på fire. Hvor stor del av hele eplet får hver?

Vi ser at vi her kan bruke delingsdivisjon, siden divisoren er et heltall.

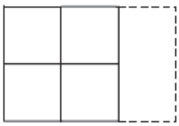
Vi kan vise oppgaven ved tegning slik:

Her er hele:

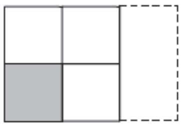
Og her er $\frac{2}{3}$ av hele:



Vi deler de $\frac{2}{3}$ i 4



Tar ut en «bit» – og ser at vi får $\frac{1}{6}$ av det hele



Det er ingen «tilfeldighet» at oppgave 1 og 3 gir samme svar. Vi ser igjen den tette sammenhengen mellom multiplikasjon og divisjon.

(Tips: Hva om den siste oppgaven hadde vært $\frac{1}{3} : 2$ eller om den første hadde vært $\frac{2}{3} : \frac{1}{4}$?)

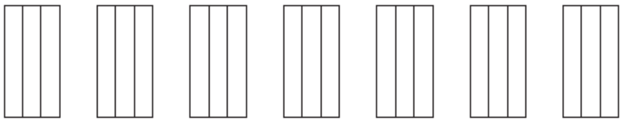
### 2.2.3.2 Eksempeloppgave

Vi tenker oss at vi har ei kanne med 7 liter saft, som skal fordeles på flasker som hver tar $\frac{1}{3}$ liter. Hvor mange flasker blir det?

Slik oppgaven er stilt, er dette målingsdivisjon. Vi skal finne ut *hvor mange* flasker det blir, og svaret får altså ikke benevningen liter (som det ville blitt ved delingsdivisjon).

Mange vil enkelt klare å ta dette i hodet, de tenker for eksempel at hver liter gir tre flasker, dermed gir 7 liter 21 flasker. Da har vi selv gjort om oppgaven fra en divisjonsoppgave til en multiplikasjonsoppgave!

Nedenfor er hver liter delt i tre, dermed blir hver del en tredels liter. Så kan vi telle opp, og ser at vi får 21 flasker. Vi kan også se det slik: Hver liter gir tre flasker, vi har syv liter så vi må multiplisere tre med syv. Da ser vi også enkelt hvorfor vi «ganger med den omvendte brøken».



For å løse oppgaven kan vi selvsagt skrive:

$$7 : \frac{1}{3} = \frac{7}{1} : \frac{1}{3} = \frac{7}{1} \cdot \frac{3}{1} = \frac{21}{1} = 21$$

### 2.2.3.3 Eksempeloppgave

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} =$$

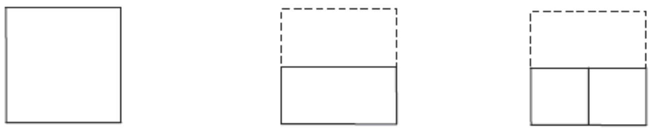
Lag tekstoppgave. Vis løsningen geometrisk.

Dersom vi skal lage en tekstoppgave relatert til delingsdivisjon her, vil den sannsynligvis for de fleste virke temmelig «kunstig». For eksempel kunne vi sagt: «Et halvt tonn gjødsel er nok til (å fordele på) en kvart åker. Hvor mange tonn trengs til hele åkeren?» Eller: «En halv liter lakk rekker til fjerdeparten av gulvet. Hvor mye trengs for å lakke hele gulvet?»

Men vi kan med fordel tenke målingsdivisjon her – og ha større mulighet for å få med oss de fleste elevene. Tekstoppgaven kunne da for eksempel være: «En halv liter saft skal helles i glass som tar en kvart liter. Hvor mange glass blir det?»

Det blir også ganske enkelt å illustrere med tegning:

Her er en hel liter: og her en halv: som vi deler to i kvartlitre:



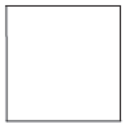
Så dersom vi deler en halv liter i glass som hvert tar en kvart liter, får vi to glass.

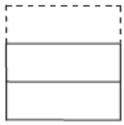
### 2.2.3.4 Eksempeloppgave

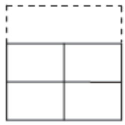
$$\frac{2}{3} : \frac{1}{6}$$

Forslag til tekstoppgave: «Vi har to tredels liter brus. Rundt oss sitter forventningsfulle venner med hvert sitt glass som tar en seksdels liter. Hvor mange får?»

Her er en liter og her er det to tredels liter igjen. Deler vi i seksdels litre,







ser vi at de to tredelene gir fire enheter på en seksdels liter. (Den siste delingen kunne vi også gjort direkte fra figur nummer 2, siden vi vet at en seksdel er halvparten av en tredel.)

Altså får fire av vennene våre fylt glasset sitt.

### 2.2.3.5 Eksempeloppgave

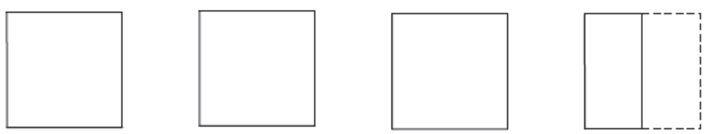
$$3\frac{1}{2} : 1\frac{1}{6}$$

Hva er en passende tekstoppgave her? Og hvordan kan løsningen vises ved tegning?

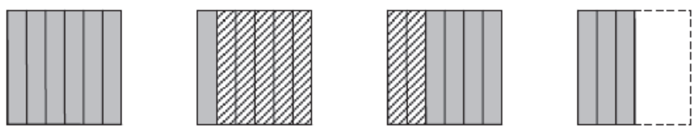
Her tenker vi som i de foregående. For eksempel har vi tre og en halv kg av «noe» som skal fylles i poser som hver tar en og en seksdels kg. *Hvor mange* poser blir det?

Noen vil kanskje «se» løsningen direkte. Tre seksdeler er jo lik en halv, altså er en halv delt på en seksdel lik tre – og deler vi tre på en, får vi også tre, så det blir altså tre poser. Dette resonnementet var kanskje ikke helt greit å følge (for mange elever), så det er sikkert lurt å lage figurer.

Her er det tre og en halv kg representert:



Så kan vi dele opp i «biter» à en seksdels kg. Siden vi vet at $1\frac{1}{6}$ er det samme som $\frac{7}{6}$, trenger vi syv av seksdelene til hver pose.



Og her kan vi «telle til syv» tre ganger, så vi får fylt akkurat tre poser.

Alle oppgavene til nå «gikk opp», men her kommer en som kanskje kan skape litt ekstra problemer:

#### *2.2.3.6 Eksempeloppgave*

$$3\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$$

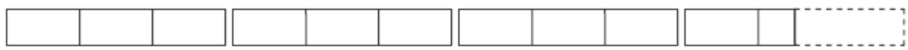
Denne kan naturligvis regnes ved hjelp av brøkreglene, men vi vil fortsatt gjerne ha en tekst og en figur.

Tekstoppgave kan for eksempel være: «Jeg har funnet tre og en halv kilo gull som jeg vil smelte om til gullbarrer på en tredels kilo.»

Noen vil sikkert se at tre hele kg vil gi ni barrer, siden hver kg gir tre. Og dermed gir den siste halve kg en og en halv barre. Til sammen blir det altså ti og en halv gullbarre. (Hvor mye veier den halve?)

Mange elever som har jobbet mye med slike oppgavetyper, vil nok også etter hvert se de enkle løsningsmetodene – og kunne forklare dem for medelever og læreren – på en lettfattelig måte. Andre vil helt sikkert måtte ha (for eksempel) ei tegning å forholde seg til.

Her er de tre og en halv kg illustrert – oppdelt i «biter» på en tredels kg. Vi ser at av en halv kg får vi en barre og en halv til overs.



Så da blir det ti hele gullbarrer og en halv.

Anbefaling: La elevene løse (i hvert fall ha jobbet med) oppgavene selv før løsningene presenteres. Dessuten er det lurt å la elevene lage oppgaver til hverandre – og forklare for hverandre.

**Ekstraspørsmål:**
Hva ville resultatet blitt dersom gullbarrene skulle veie en seksdels kilo?

Altså om brøkuttrykket hadde vært:

$$3\frac{1}{2} : \frac{1}{6}$$

### 2.2.4 Avslutning

Multiplikasjon og divisjon av brøker er vanskelig for mange. Vi håper at dette har gitt noen innspill om hvordan man kan jobbe med dette. Det er nyttig å jobbe stegvis med temaet, for eksempel ved å dividere med brøker med 1 i teller før man går videre til generelle brøker. For mange elever vil det være klargjørende å arbeide med geometriske framstillinger av brøkoppgavene. Å se på tekstoppgaver med sammenhenger som elevene kan kjenne seg igjen i, er også viktig – og her bør læreren være bevisst på forskjellen mellom delings- og målingsdivisjon. De fleste elevene er klar over at multiplikasjon og divisjon er motsatte operasjoner når de arbeider med heltall, og det er viktig at de ser at den samme sammenhengen gjelder for brøker.

## 2.3 Brøk, prosent, desimaltall

1. Skriv som brøk: a) 0,3 b) 0,75 c) 0,4 d) 2,5

2. Skriv som prosent: a) 0,3 b) 0,75 c) 0,4 d) 2,5

3. Skriv som desimaltall: a) $\frac{13}{100}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{9}$ d) $\frac{15}{7}$

4. Skriv som desimaltall: a) 15 % b) 0,2 % c) 80 % d) 205

5. Skriv som brøk (forkort): a) 15 % b) 0,2 % c) 80 % d) 2,05 %

6. Hva er størst av (vis flere alternative løsningsmåter):
   a) 90 % og $\frac{10}{11}$ b) $\frac{1}{3}$ og 25 % c) 0,3 og $\frac{1}{3}$ d) $\frac{3}{4}$ og $\frac{2}{3}$ e) $2\frac{2}{5}$ og 250 % f) 3,3 og $3\frac{2}{6}$

7. Regn ut: a) $\frac{13}{9}+\frac{5}{9}=$ b) $\frac{3}{8}+\frac{8}{3}=$ c) $\frac{8}{3}-\frac{3}{8}=$ d) $1\frac{2}{3}-\frac{3}{8}=$
   e) $2\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=$ f) $1{,}5+\frac{3}{5}=$ g) $\frac{3}{5}-\frac{1}{2}=$ h) $3\frac{3}{4}-3\frac{4}{5}=$

8. Regn ut: a) $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=$ b) $\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{7}=$ c) $2\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=$ d) $2\frac{3}{8}\cdot 1\frac{1}{6}=$
   e) $\frac{1}{2}:\frac{1}{6}=$ f) $2\frac{1}{4}:\frac{1}{12}=$ g) $4{,}5:1\frac{1}{2}=$ h) $3\frac{1}{8}:\frac{1}{4}=$

9. Lag regnefortellinger / oppgaver som passer til brøkoppgavene i 8.

10. Et par ski kostet 2400 kroner. Hos Skiutstyr A/S var de satt ned til 1920 kr, mens du kunne få dem for 1680 kr hos XL-Ski A/S.
    a) Hvor mange prosent avslag ga Skiutstyr A/S?
    b) Hvor mange prosent avslag ga XL-Ski A/S?
    c) Hvor mange prosent dyrere var skiene hos Skiutstyr A/S enn hos XL-Ski A/S?
    d) Hvor mange prosent billigere var skiene hos XL-Ski A/S enn hos Skiutstyr A/S?
    e) Hvor mange prosent høyere var opprinnelig pris enn prisen hos XL-Ski A/S?

11. Følgende oppgave ble gitt til en ungdomsskoleeksamen: $2\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=$
    Blant elevsvarene var disse:
    1) $2\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=2:\frac{1}{3}+\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=2\cdot 3+2=8$

    2) $2\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=\frac{8}{3}:\frac{1}{3}=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$

    3) $2\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=\frac{3}{8}:\frac{1}{3}=\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{8}{9}$

    4) $2\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=\frac{3}{8}:\frac{1}{3}=\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{1}=\frac{9}{8}$

    5) $2\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=\frac{8}{3}:\frac{1}{3}=\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{1}=\frac{24}{3}=8$

6) $2\frac{2}{3} : \frac{1}{3} = \frac{3}{8} : \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{1} = 8$

a) Kommenter løsningene. Hvordan har elevene tenkt? Hvilke feil er gjort? (Hvorfor? Hva er misforstått?) Er noen av løsningene riktige? Kommenter utførelsen.
b) Lag en passende regneoppgave/regnefortelling til oppgaven og løs den på korrekt måte.
c) Hvordan ville du ha arbeidet med elever som gjør feil i slike typer oppgaver?

12. Gir disse oppgavene samme innbyrdes resultat?:

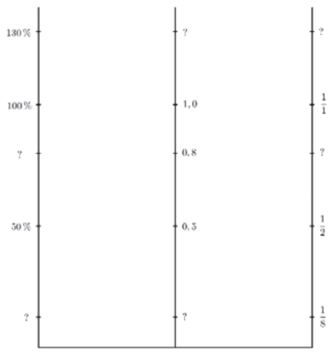
a) 24 : (4 : 12) og 24 : (12 · 4)

b) (36 : 4) : 6 og 36 : (4 · 6)

c) 20 : (80 · 10) og (20 : 80) :10

d) (10 · 21) : 30 og 10 · (30 : 21)

13. Sett i riktig tall i boksene:




$100\ \% = 1{,}0 = \frac{1}{1}$

$50\ \% = 0{,}5 = \frac{1}{2}$

$\square = \square = \frac{1}{8}$

$\square = 0{,}8 = \square$

$130\ \% = \square = \square$

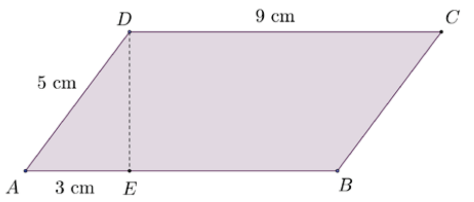
14.

a. Ei bukse settes ned med 15 % fra 1500 kr. Ny pris?
b. Ei bukse ble satt ned fra 1500 kr til 1275 kr. Hvor mange prosent avslag?
c. Ei bukse ble solgt for 1275 kr. Da var den satt ned med 15 %. Opprinnelig pris?

# 3 Repetisjonsoppgaver til Del 2 på skriftlig eksamen

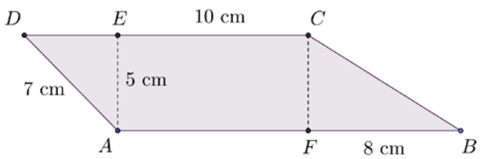
## 3.1 Geometri

1. I parallellogrammet er $DA = 5$ cm, $CD = 9$ cm, $AE = 3$ cm, og $DE$ normal til $AB$.




   a) Regn ut høyden i parallellogrammet.
   b) Regn ut omkrets og areal.
   c) Konstruer parallellogrammet.

2. I figuren er $AD = 7$ cm, $AE = 5$ cm, $BF = 8$ cm, $EC = 10$ cm, og $AB$ og $DC$ er parallelle.

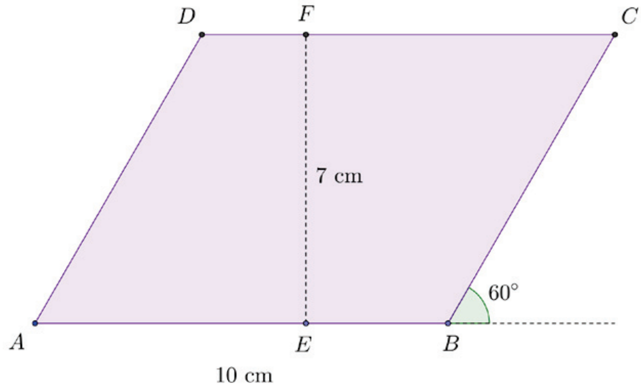



   a) Hva heter figuren over?
   b) Regn ut omkrets og areal.
   c) Konstruer figuren.

3. 
   a) Konstruer et parallellogram med sider 5 cm og 8 cm, og der $\angle A = 60°$. Regn ut høyden og arealet.
   b) Samme oppgave som a), men med $\angle A = 120°$.
   c) Konstruer et parallellogram $ABCD$ der $AB = CD = 7$ cm og $BC = DA = 5$ cm. Høyden fra $D$ ned på $AB$ treffer $AB$ i $E$, og $ED = 4$ cm. Regn ut omkrets, areal og lengden av linjestykket $AE$.

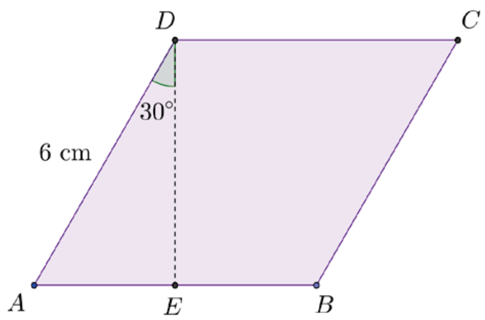
4. I en figur $ABCD$ er $AB$ og $CD$ parallelle ($AB \parallel CD$), $AB = BC = 5$ cm, $CD = 7$ cm, og koreste avstand mellom $AB$ og $CD$ er 3 cm.
   a) Konstruer figuren.
   b) Hva heter figuren?
   c) Regn ut areal og omkrets.

5. I figuren er $AB \parallel CD$ og $AD \parallel BC$. Linjestykket $EF$ står normalt på $AB$ og $DC$.




a) Hva heter figuren?
b) Konstruer figuren.
c) Regn ut areal og omkrets.

6. I figuren er alle sider like lange. Dessuten er $AB \parallel CD$ og $AD \parallel BC$, og linjestykket $ED$ står vinkelrett på $AB$.




a) Hva heter figuren?
b) Konstruer figuren.
c) Regn ut areal og omkrets.

Dette er en forminskning av et stort, flatt skogsområde i målestokk 1: 10000.

d) Hva er areal og omkrets i virkeligheten?
e) Gjør om arealet til antall mål
og til antall kvadratkilometer.
f) Hvilken lengde har AE i virkeligheten?
Hvorfor? Begrunn.

7.

a) Øv på konstruksjon av forskjellige trekanter og firkanter.
(Trekanter: likebeinte, rettvinklede, likesidede …. Merk forskjeller og likheter.)

(Firkanter: parallellogram, kvadrat, rombe, trapes, rektangel, drake. Forskjeller og likheter?)

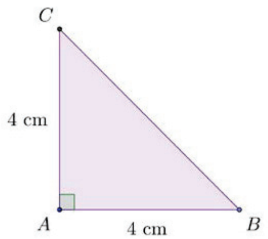
b) Er: et rektangel et kvadrat? et kvadrat et rektangel? en rombe et kvadrat? en rombe et parallellogram? et parallellogram en rombe? et kvadrat en rombe? et rektangel et parallellogram? et parallellogram et rektangel? Er noen av figurene et trapes? En drake?

8.

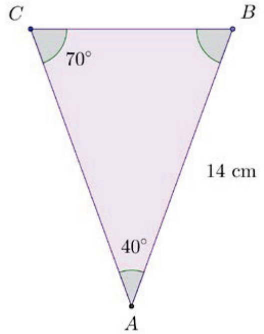
a) Hva er vinkelsummen i en trekant, firkant, femkant osv?

b) Finner du noen sammenheng / regel her?

c) Hva kalles figuren under? Regn ut areal og omkrets.




d) I figuren er $AB = 14$ cm, $\angle BAC = 40°$, og $\angle ACB = 70°$.
Hva vet vi ellers her? Areal? Omkrets? Navn? Vinkler?




9. Konstruer et rektangel $ABCD$ der $AB = CD = 6$ cm og $BC = DA = 4{,}5$ cm. Rektangelet er formlikt med et rom der den korteste siden er 9 m. I hvilken målestokk er konstruksjonen? Hvilken omkrets har rommet (i virkeligheten)?

10. Et rektangel har sider $AB = CD = 12$ cm og $BC = DA = 5$ cm. Konstruer rektangelet. Avsett $E$ på $AB$ slik at $AE = 7$ cm. Merk av punktet $F$, som ligger i rektangelet, 4 cm fra $DA$ og samtidig 2 cm fra $AB$. Regn ut omkrets og areal av femkanten $AECFD(A)$.

11.

a) Konstruer en likesidet trekant $ABC$ med sider 5 cm.

b) Roter trekanten 60° mot urviseren om $B$. Kall det nye punktet for $E$.

c) Hva heter den figuren $AEBC$?

d) Speil trekanten $AEB$ om $EB$. Kall det nye punktet for $F$.

e) Hva heter den figuren du nå har fått?

f) Regn ut areal og omkrets av $AECF$.

12.

a) Hvilke symmetriakser har et kvadrat? Vis med figur.
b) Hvilke symmetriakser har et rektangel? Vis ved figur.
c) Hvilke symmetriakser har en sirkel? Vis ved figur.
d) Forklar begrepet glidespeiling. Vis ved eksempler.

13.

a) Konstruer en trekant $ABD$, der $AB = 5$ cm, $AD = 4$ cm, $BD = 3$ cm.
b) Forklar at $\angle BDA = 90°$. (Bruk Pytagoras.) Relater til et geometrisk sted.
c) Trekanten $ABD$ utvides til firkanten $ABCD$ der $C$ ligger på ei linje parallell med $BD$ i avstanden 4 cm, og samtidig på midtnormalen til $BD$.
d) Midtnormalen i c) betegner et geometrisk sted. Forklar.
e) Regn ut areal og omkrets av ABCD.

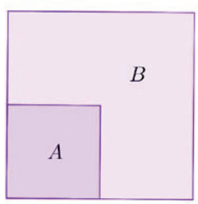
14.

a) Konstruer en likesidet trekant $ABD$ der sidelengdene er 6 cm.
b) Konstruer normalen fra $D$ på $AB$. Kall skjæringspunktet ved $AB$ for $E$.
c) Regn ut $DE$. Begrunn.
d) Regn ut areal og omkrets for $ABD$.
e) Trekanten $ABD$ utvides til en firkant $ABCD$, der $C$ ligger på ei linje parallell med $BD$ i avstanden 8 cm, og $CD = 10$ cm.
f) Begrunn at $\angle CBD = 90°$. (Se oppgave 13.b).)
g) Regn ut omkrets og areal av firkanten $ABCD$.
h) I e) kunne vi fått ei løsning til. Begrunn.

15.

a) Vis at vinkelsummen i en trekant er 180°.
b) Tegn en trekant. Tegn en ny trekant med en side felles med den forrige. Bruk resultatet til å vise hva vinkelsummen i en (hvilken som helst) firkant er.
c) Hva blir vinkelsummen i en femkant, sekskant osv…?

16. To kvadrater




$A$ er det lille, $B$ er det store. Sidelengdene i $B$ er dobbelt så lange som i $A$.
Hva med omkretsen til $B$ i forhold til $A$? Er den:
- dobbelt så lang, - tre ganger så lang, - fire ganger så lang?
Hva med arealet til $B$ i forhold til $A$? Er det:
- dobbelt så stort, - tre ganger så stort, - fire ganger så stort?

Er det sammenheng mellom areal og omkrets?

## 3.2 Andre tallsystemer

1. Lag multiplikasjonstabell (og gjerne addisjonstabell) for tallsystemene 4 – 9.

2. Regn ut i 4- og 5-tallsystemet:
   a) $233 + 133 =$
   b) $322 - 133 =$
   c) $123 \cdot 32 =$
   d) $213 \cdot 23 =$
   e) Gjør om 223,21 til et tall i titallsystemet

3. Regn ut i 6- og 7-tallsystemet:
   a) $455 + 355 =$
   b) $544 - 355 =$
   c) $345 \cdot 54 =$
   d) $435 \cdot 45 =$
   e) Gjør om 445,42 til et tall i titallsystemet

4. Regn ut i 8- og 9-tallsystemet:
   a) $677 + 577 =$
   b) $766 - 577 =$
   c) $567 \cdot 76 =$
   d) $657 \cdot 67 =$
   e) Gjør om 667,61 til et tall i titallsystemet.

5. Kontroller oppgavene i 2 – 4 (a – d) ved omregning til tiltallsystemet.

6. Lag selv (ved å foreta multiplikasjon) divisjonsoppgaver i noen av (alle?) tallsystemene ovenfor, og løs dem.
   Dersom du f. eks. regner ut $456 \cdot 7$ i åttetallsystemet, får du 4102 (i åttetallsystemet).
   Kontroller selv ved å regne om til titallsystemet.
   Da vet du at dersom du regner $4102 : 7$ i åttetallsystemet, så må riktig svar bli 456 (i åttetallsystemet). Ble det det?

7. Regn ut i sekstallsystemet. Kontroller deretter i titallsystemet.
   a) $135_{\text{seks}} + 45_{\text{seks}} =$
   b) $243_{\text{seks}} - 54_{\text{seks}} =$
   c) $123_{\text{seks}} \cdot 45_{\text{seks}} =$
   d) $334_{\text{seks}} : 5_{\text{seks}} =$

8. Regn ut i nitallsystemet. Kontroller deretter i titallsystemet.
   a) $268_{\text{ni}} + 847_{\text{ni}} =$
   b) $847_{\text{ni}} - 268_{\text{ni}} =$
   c) $768_{\text{ni}} \cdot 53_{\text{ni}} =$
   d) $532_{\text{ni}} : 7_{\text{ni}} =$

9.

a) $57_{\text{tretten}}$ tilsvarer 242 i et annet tallsystem. Hvilket?
b) $98_{\text{tolv}}$ tilsvarer 224 i et annet tallsystem. Hvilket?
c) $232_{\text{fire}}$ tilsvarer 51 i et annet tallsystem. Hvilket?

10. Hvor mye blir $234_{\text{fem}} + 122_{\text{tre}}$ omregnet til firetallsystemet?

11. Tallet 49 i ellevetallsystemet tilsvarer 311 i et annet tallsystem. Hvilket? [Kan også skrives $49_{\text{elleve}} = 311_x$.]

12. Tallet 1234,1234 er i femtallsystemet. Hva tilsvarer det i titallsystemet?

13. Regn om $55_{\text{ti}}$ til to-, fire-, seks- og åttetallsystemet.

14. Regn om $148_{\text{ti}}$ til tre-, fem-, syv- og nitallsystemet.

15. Regn om

a) $10101_{\text{seks}}$ til åttetallsystemet
b) $543_{\text{seks}}$ til tretallsystemet
c) $456_{\text{syv}}$ til nitallsystemet

16. Lag og løs liknendeoppgaver som oppgave 1.-15.

17. a) $111_{\text{to}} + 1001_{\text{to}} + 101_{\text{to}}$ b) $212_{\text{tre}} + 21_{\text{tre}}$ c) $755_{\text{åtte}} + 46_{\text{åtte}}$ d) $187_{\text{ni}} + 682_{\text{ni}}$
18. a) $2011_{\text{tre}} - 1202_{\text{tre}}$ b) $612_{\text{åtte}} - 77_{\text{åtte}}$ c) $523_{\text{ni}} - 68_{\text{ni}}$
19. a) $101_{\text{to}} \cdot 111_{\text{to}}$ b) $202_{\text{tre}} \cdot 222_{\text{tre}}$ c) $704_{\text{åtte}} \cdot 67_{\text{åtte}}$ d) $78_{\text{ni}} \cdot 815_{\text{ni}}$
20. a) $100011_{\text{to}} : 101_{\text{to}}$ b) $201021_{\text{tre}} : 222_{\text{tre}}$ c) $60434_{\text{åtte}} : 67_{\text{åtte}}$ d) $71424_{\text{ni}} : 78_{\text{ni}}$
21. a) $12012_{\text{tre}} : 2_{\text{tre}}$ b) $4102_{\text{åtte}} : 7_{\text{åtte}}$ c) $3536_{\text{ni}} : 7_{\text{ni}}$

## 3.3 Notat: Hvordan regne ut eksplisitt formel for tallfølger og firgurtall?

Tallfølger er en nyttig ressurs i arbeid med algebra og funksjoner. Å studere tallfølger gir god trening i å se og beskrive systemer som det deretter kan utvikle formler for. I denne artikkelen skal vi spesielt se på arbeid med eksplisitte formler for tallfølger – og «overføre» til figurtall.

Hva blir neste tall – og neste, og så videre – i disse tallfølgene?

a) 2, 4, 6, 8, … b) 1, 3, 5, 7, … c) 2, 4, 7, 11, …
d) 1, 4, 9, 16, … e) 1, 3, 6, 10, … f) 2, 6, 12, 20, …

Hvordan kan utviklingen beskrives med ord? Kan vi finne formler for utviklingen?

### 3.3.1 Eksplisitt formel, og 1. og 2. differanse

Alle tallfølgene over kan illustreres ved antall kryss, prikker eller streker (med mer) som *figurtall*. For eksempel representerer tallfølgen i f) «rektangeltallene». Å illustrere tallfølgene med figurtall kan gi oss et bredere utvalg av metoder for å beskrive mønstre og utvikle formler.

Vi setter $n$ for plassen tallene befinner seg i. I a) ovenfor ser vi at $n = 1$ gir tallet 2, og $n = 2$ gir tallet 4 osv. Vi skal finne en formel som gir oss alle tallene i tallfølgen uansett hvor i rekkefølgen de er, dvs uansett hva $n$ er. Denne formelen kaller vi *den eksplisitte formelen*.

Vi ser på partallene først, a). Elever tidlig i skoleløpet kan se at vi får det neste tallet ved å legge til 2. (Da har vi den *rekursive* formelen $P_{n+1} = P_n + 2$, men i dette delkapitlet ser vi imidlertid ikke på den rekursive, men den eksplisitte formelen). Vi ser at alle partallene er gitt ved formelen $P_{n+1} = 2n$. Det er *den eksplisitte formelen for partallene*. Tilsvarende blir eksplisitt formel for oddetallene $O_n = 2n - 1$.

Når det gjelder eksplisitt formel for partall og oddetall (og mange flere), gir de oss et funksjonsuttrykk. For partallene kunne vi skrevet $y = 2x$ eller $y = 2n$ eller $f(n) = 2n$ eller, slik vi har gjort: $P_n = 2n$. Hva slags funksjon er det? Hvordan vil grafen til funksjonen se ut (hvis vi utvider definisjonsmengden fra heltallene til alle reelle tall)?

I c) ovenfor legger vi ikke til et fast tall, men vi *øker tillegget* med 1 hver gang. Med andre ord: Vi får først en differanse – som *ikke* er fast – den kaller vi for *første differanse*, vi skriver: 1. differanse. Denne første differansen økes med 1 for hver gang. "Differansen av differansene" (som her er 1) kaller vi *andre differanse*, vi skriver: 2. differanse. (Dette har sammenheng med den 1. og 2. deriverte av funksjonsuttrykket, men det trenger vi ikke bry oss om dersom vi ikke er fortrolige med derivasjon og integrasjon.)

I tabellen nedenfor vises utviklingen for tallfølgen («figurtallet») i c):

<table>
<tr><td>Tall</td><td colspan="2">$F_1$</td><td colspan="2">$F_2$</td><td colspan="2">$F_3$</td><td colspan="2">$F_4$</td><td colspan="2">$F_5$</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">$F_n$</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Tallverdi</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">7</td><td colspan="2">11</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">1. differansen</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">2. differansen</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Tabell 1

Her er det ikke like lett å finne den eksplisitte formelen (eller ser vi at den er $T_n + 1$? – OBS: se fotnote på side 23), men etter hvert skal vi se på noen metoder for det. Og følgen kan greit beskrives med ord (det bør du generelt gjøre).

## 3.3.2 Rektangeltallene og trekanttallene som andregradsfunksjoner

Andregradsfunksjoner har generell formel $y = ax^2 + bx + c$, eller for figurtall

$$F_n = an^2 + nb + c.$$

Her er $a$, $b$ og $c$ konstanter, som må bestemmes når vi skal finne eksplisitt formel. Vi bruker rektangeltallene som eksempel. Som tidligere nevnt, er tallfølgen i f) rektangeltallene. I figurtallsammenheng forutsetter vi at den lengste «siden» er (nøyaktig) 1 lengre enn den korteste. Den eksplisitte formelen er

$$R_n = n(n+1) \quad \text{eller} \quad R_n = n^2 + n.$$

Vi ser at i formelen $F_n = an^2 + bn + c$ er $a = 1$, $b = 1$ og $c = 0$.

Nedenfor har vi laget en tabell for rektangeltallene tilsvarende tabell 1 ovenfor. Men *OBS*: her har vi også tatt med $R_0$ — altså verdien når $n = 0$. Og, som vi skal vise i 3.3.4.1, når $n = 0$, tilsvarer verdien $c$-leddet. For rektangeltallene er det ikke noe $c$-ledd ($R_0 = 0$ betyr at $c = 0$).

| Tall | $\boldsymbol{R_0}$ | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $R_4$ | ... | $R_n$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tallverdi | **0** | 2 | 6 | 12 | 20 | | | |
| 1. differansen | **2** | 4 | 6 | 8 | | | | |
| 2. differansen | | **2** | 2 | 2 | | | | |

Tabell 2

Hvordan regnet vi oss tilbake til $R_0$?:
Vi vet at 2. differansen er 2, da må 1. differansen fra $R_0$ til $R_1$ være 2, og vi finner at $R_0 = 0$.

Så ser vi på trekanttallene. Vi kan betrakte dem som halvparten av rektangeltallene:
For eksempel ser rektangeltall nummer 3 slik ut:

x x x x
x x x x
x x x x

Og ved å ta bort halvparten får vi fram trekanttall nummer 3, som vi kan framstille slik:

x
x x
x x x

Trekanttallene finner vi i e) foran. I tabell kan de settes opp slik:

| Tall | $\boldsymbol{T_0}$ | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | $T_4$ | ... | $T_n$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tallverdi | **0** | 1 | 3 | 6 | 10 | | | |
| 1. differansen | **1** | 2 | 3 | 4 | | | | |
| 2. differansen | | **1** | 1 | 1 | | | | |

Tabell 3

Det stemmer med den eksplisitte formelen. I likhet med for $R_0$ ble også $T_0$ lik 0, dvs $c = 0$.
Verdien blir lik halvparten av rektangeltallene, altså får vi disse formlene for trekanttallene[2]

$$T_n = \frac{(n+1) \cdot n}{2} \quad \text{eller} \quad T_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

[2] OBS: Den eksplisitte formelen for tabell 1 kan da skrives $T_n + 1 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$

### 3.3.3 Vi lager ei tallfølge ut fra en oppgitt eksplisitt formel

Vi bruker formelen $F_n = n^2 + 5n + 7$. Det gir denne tallfølgen: 13, 21, 31, 43, …

I tilsvarende tabell som vi har brukt før, ser utviklingen slik ut:

<table>
<tr><td>Tall</td><td colspan="2">$F_0$</td><td colspan="2">$F_1$</td><td colspan="2">$F_2$</td><td colspan="2">$F_3$</td><td colspan="2">$F_4$</td><td colspan="2">…</td><td colspan="2">$F_n$</td><td colspan="2">…</td></tr>
<tr><td>Tallverdi</td><td colspan="2">7</td><td colspan="2">13</td><td colspan="2">21</td><td colspan="2">31</td><td colspan="2">43</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">1. differansen</td><td colspan="2">6</td><td colspan="2">8</td><td colspan="2">10</td><td colspan="2">12</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">2. differansen</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Tabell 4

$F_0 = 7$ er også tatt med her. Som vi skal vise i 3.3.4.1 er $c = F_0$ for $n = 0$, så her blir $c = F_0 = 7$.

Hvordan beregninger man $F_0$, og dermed $c$, i tabellen?
Vi ser at 1. differansen øker med 2 for «hvert skritt», og 2. differansen er konstant lik 2. Det betyr at 1. differansen minker med 2 fra $F_1$ til $F_0$. Så her blir 1. differansen 6. Det gir oss $F_0 = 13 - 6 = 7$. Altså er $c = F_0 = 7$. (Å regne ut $F_0$ ved hjelp av 1. differansen fra $F_0$ til $F_1$, vil generelt lette arbeidet når vi skal finne formler.)
OBS: Merk at $a = 1$ tilsvarer halvparten av 2. differansen, slik tilfellet var også for rektangeltallene og trekanttallene. At $a$ er halvparten av 2. differansen, gjelder generelt. Det kommer vi tilbake til. (Det har sammenheng med integrasjon og derivasjon, men vi trenger ikke å forholde oss til akkurat det).

### 3.3.4 Utvikling av eksplisitt formel for figurtall som gir andregradsfunksjoner

Nå skal vi utvikle metoder for å finne den eksplisitte formelen også for andre figurtall som har utgangspunkt i 2. gradsfunksjoner. Når det er snakk om 2. gradsfunksjoner, er 2. differansen alltid konstant (slik vi har sett av eksemplene tidligere).

Vi husker på at den generelle formelen for en andregradsfunksjon er

$f(x) = ax^2 + bx + c$ eller eventuelt $y = ax^2 + bx + c$.

Eller som vi vil skrive for figurtall:

$$F_n = an^2 + bn + c.$$

Vi prøver oss på tallfølgen 9, 15, 23, 33, ….

#### *3.3.4.1 Metode 1: bruk av tre likninger med tre ukjente*

I denne metoden bruker vi verdiene for de tre første leddene i en tallfølge til å sette opp en likningssett. Vi bruker tallfølgen 9, 15, 23, 33, … som et eksempel.

Vi setter inn i tabell:

<table>
<tr><td>Tall</td><td colspan="2">$F_1$</td><td colspan="2">$F_2$</td><td colspan="2">$F_3$</td><td colspan="2">$F_4$</td><td colspan="2">$F_5$</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">$F_n$</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Tallverdi</td><td colspan="2">9</td><td colspan="2">15</td><td colspan="2">23</td><td colspan="2">33</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">1. differansen</td><td colspan="2">6</td><td colspan="2">8</td><td colspan="2">10</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">2. differansen</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Tabell 5

Den *eksplisitte* formelen kan vi finne ved å sette opp tre likninger med tre ukjente $a$, $b$ og $c$.

Vi vet at den generelle eksplisitte formelen er $F_n = an^2 + bn + c$, men her kjenner vi verken $a$, $b$ eller $c$.
Imidlertid vet vi at:

- $F_1 = 9$ er gitt ved $a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 9$, som gir $a + b + c = 9$
- $F_2 = 15$ er gitt ved $a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 15$, som gir $4a + 2b + c = 15$
- $F_3 = 23$ er gitt ved $a \cdot 3^3 + b \cdot 3 + c = 23$, som gir $9a + 3b + c = 23$

Dermed har vi tre likninger med tre ukjente, og vi kan finne $a$, $b$ og $c$. Selvsagt er det et spørsmål hvor mange som behersker metoder for å løse litt «kompliserte» likningssett. Derfor skal vi utvikle en tabell for $F_n = an^2 + bn + c$ slik at vi kan dra nytte av 1. og 2. differansene.

Ut fra det generelle uttrykket for andregradsfunksjoner, $F_n = an^2 + bn + c$, har vi følgende:

$$F_0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$$
$$F_1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c$$
$$F_2 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4a + 2b + c$$
$$F_3 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 9a + 3b + c$$
$$F_4 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = 16a + 4b + c$$

Hvis vi setter disse inn i en tabell og regner ut 1. og 2. differansen, får vi

| Tall | $F_0$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | … | $F_n$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tallverdi | $c$ | $a+b+c$ | $4a+2b+c$ | $9a+3b+c$ | $16a+4b+c$ | | | |
| 1. differansen | $a+b$ | $3a+b$ | $5a+b$ | $7a+b$ | | | | |
| 2. differansen | | $2a$ | $2a$ | $2a$ | | | | |

Tabell 6

Merk at 2. differansen er $2a$ for alle de verdiene som vi har regnet ut. En annen måte å si det samme på er at $a$ er halvparten av 2. differansen. Det kan vises at dette alltid gjelder for tallfølger og figurtall som har utgangspunkt i andregradsfunksjoner[3]. Merk også at $F_0 = c$. Dette gjelder også alltid for tallfølger og figurtall som har utgangspunkt i andregradsfunksjoner fordi $F_0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$. Vi kan bruke disse observasjoner til å utvikle en annen metode.

#### 3.3.4.2 Metode 2: beregning av $a$ og $c$, deretter finne $b$

Vi tar fortsatt for oss tallfølgen 9, 15, 23, 33, …. og setter opp tabell.

| Tall | $\boldsymbol{F_0}$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | … | $F_n$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tallverdi | **5** | 9 | 15 | 23 | 33 | | | |
| 1. differansen | **4** | 6 | 8 | 10 | | | | |
| 2. differansen | | **2** | 2 | 2 | | | | |

Tabell 7

Denne gangen regner vi også ut verdiene av $F_0$: Vi ser at 2. differansen er lik 2. Derfor må tillegget fra $F_0$ til $F_1$ være 4, så da er $F_0 = 5$.

[3] Du kan vise dette selv ved å bruke formelen $F_n = an^2 + bn + c$. Først regner du ut 1. differansene for $F_n$ med leddene som kommer før og etter. Dvs $F_{n+1} - F_n$ og $F_n - F_{n-1}$. Ut fra det kan du regne ut den generelle 2. differansen: $(F_{n+1} - F_n) - (F_n - F_{n-1})$. Resultatet blir $2a$.

Nå kan vi bruker verdiene i tabellen til å finne $a$, $b$ og $c$ for den eksplisitte formelen

$$F_n = an^2 + bn + c.$$

Som vi fant tidligere er alltid $a$ halvparten av 2. differansen ved andregradsuttrykk. Altså er $a = 1$. Vi fant også at $F_0 = c$. Dermed har vi $c = 5$.

Nå kjenner vi både $a$ og $c$, men ikke $b$, så formelen blir $F_n = 1 \cdot n^2 + bn + 5$ som kan skrives

$$F_n = n^2 + bn + 5.$$

Vi utnytter at for $n = 1$ har vi at $F_1 = 9$. Da får vi $1^2 + b \cdot 1 + 5 = 9$, og vi finner at b = 3.

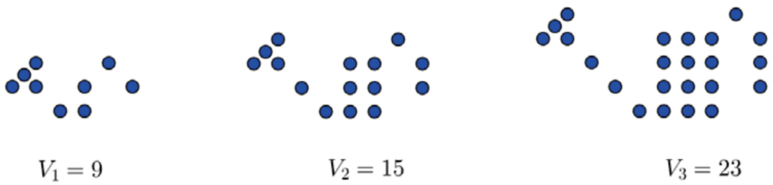
Dermed har vi den eksplisitte formelen:

$$F_n = n^2 + 3n + 5$$

At dette er riktig, kontroller vi ved å sette inn verdier for $n$ og regne ut $F_n$.

#### 3.3.4.3 Metode 3: Beregning ved hjelp av kjente figurtall, K, T, R

Denne metoden tar utgangspunkt i oppbygging av figurene. For å finne den eksplisitte formelen forsøker vi å finne ut om figurtallene er sammensatt av de kjente ($K_n$, $R_n$ og $T_n$), og i så fall hvilke. Nedenfor er, for eksempel, «vannkannetall» illustrert i figur 1.




Figur 1: De tre første vannkannetallene

For å være sikker på at du er kjent med oppbyggingen av disse tallene, er det lurt å tegne de to neste figurene, dvs $V_4$ og $V_5$.

Her kan vi finne den eksplisitte formelen ved å dele opp hver figur i tre ledd: en tut, en vanntank og et håndtak. Vanntanken kjenner vi igjen som rektangeltall, dvs $R_n$. Tuten har et rør og et «dusjmunnstykke». Røret har like mange prikker som nummeret til figuren (f.eks. har røret i $V_2$ to prikker, og røret i $V_3$ har tre prikker), og dusjmunnstykket har alltid fire prikker. Så tuten i figuren $V_n$ skal ha $n + 4$ prikker. Håndtaket har like mange prikker som nummeret til figuren pluss en prikk som fester det til vanntanken. Altså skal håndtaket i figuren $V_n$ ha $n + 1$ prikker. Ved å sette sammen formlene for tuten, vanntanken og håndtaket i figur $V_n$ får vi

$$V_n = n + 4 + R_n + n + 1.$$

I delkapittel 3.3.2, så vi at den eksplisitte formelen for rektangeltallene er $R_n = n(n + 1)$. Vi kan da sette $n(n + 1)$ i stedet for $R_n$ i formelen for $V_n$ og deretter forenkle formelen:

$$\begin{aligned} V_n &= n + 4 + R_n + n + 1 \\ &= n + 4 + n(n + 1) + n + 1 \\ &= n + 4 + n^2 + n + n + 1 \\ &= n^2 + 3n + 5 \end{aligned}$$

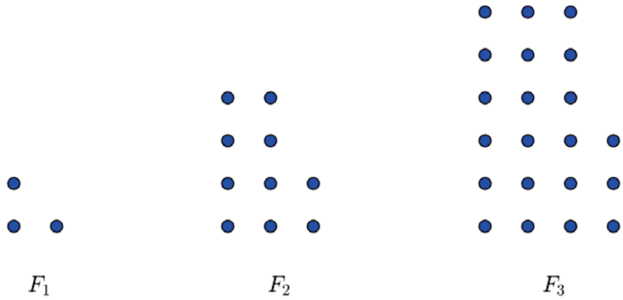
*NB*: Merk at den eksplisitte formelen for vannkannetallene er akkurat lik den som vi fikk for tallfølgen $F_n$ i det forrige delkapitlet. Dette er ingen tilfeldighet! Antall prikker i de tre første vannkannetallfigurene er henholdsvis 9, 15, og 23, som også er de tre første tallene i $F_n$.

## 3.3.5 To eksempler

Her følger to eksempler der vi først skal benytte oss av Metode 3 (fra delkapittel 3.3.4.3) og deretter Metode 2 (fra delkapittel 3.3.4.2).

### *3.3.5.1 Eksempel*

Nedenfor følger de tre første figurene for figurtallet $F_n$.




Figur 2: De tre første figurene for $F_n$

**Metode 3** (metode ved beregning ved hjelp av kjente figurtall $K_n$, $R_n$ og $T_n$)
Ser vi nærmere etter, oppdager vi (kanskje) at i dette tilfellet er figurtallet sammensatt av et kvadrat og et rektangel. Vi kan skrive

$$F_1 = K_1 + R_1 \qquad F_2 = K_2 + R_2 \qquad F_3 = K_3 + R_3$$

og så videre. Eksplisitt formel blir:

$$F_n = K_n + R_n$$

(Vi må summere uttrykkene for $K_n$ og $R_n$.)

Vi kjenner de eksplisitte formlene for begge disse, og får

$$F_n = n^2 + n(n+1) = n^2 + n^2 + n = 2n^2 + n.$$

(Dette gir god trening i enkel omskriving av algebrauttrykk.)

Vi kan også bruke **Metode 2** (beregning av $a$ og $c$, deretter finner $b$):
Vi setter inn i tabell:

| Tall | $\boldsymbol{F_0}$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | ... | $F_n$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tallverdi | **0** | 3 | 10 | 21 | | | | |
| 1. differansen | | **3** | 7 | 11 | | | | |
| 2. differansen | | **4** | 4 | | | | | |

Tabell 8

Vi ser at $c = F_0 = 0$ og at $a = \frac{4}{2} = 2$.

Beregning av $b$. Generelt: $F_n = 2n^2 + bn + 0$. Vi setter inn for $n = 1$ og får

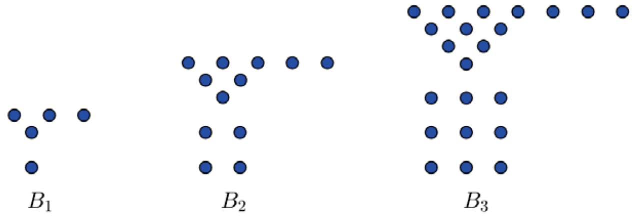
$$F_1 = 2 \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 0 = 3$$

som gir $b = 1$.

Formelen blir: $F_n = 2n^2 + n$.

#### 3.3.5.2 Eksempel

Her er de tre første figurene for figurtall $B_n$:




Figur 3: De tre første figurene for $B_n$

**Metode 3:**
Her er:

$$B_1 = K_1 + T_2 + 1 \qquad B_2 = K_2 + T_3 + 2 \qquad B_3 = K_3 + T_4 + 3$$

Generelt har vi at $B_n = K_n + T_{n+1} + n$. Den generelle eksplisitte formelen kan vi regne ut til

$$B_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + 1$$

(som gir god algebratrening!)

Men vi kan også benytte **Metode 2:**
Vi setter inn i tabell:

| Tall | $\boldsymbol{B_0}$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | ... | $B_n$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tallverdi | **1** | 5 | 12 | 22 | | | | |
| 1. differansen | **4** | 7 | 10 | | | | | |
| 2. differansen | | **3** | 3 | | | | | |

Tabell 9

Vi finner at $c = B_0 = 1$ og at $a = \frac{3}{2}$.

Beregning av $b$: Vi har at $B_n = \frac{3}{2}n^2 + bn + 1$. Så setter vi inn for $n = 1$ og får

$$B_1 = \frac{3}{2} \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 1 = 5$$

som gir $b = \frac{5}{2}$. Formelen blir:

$$B_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + 1$$

### 3.3.6 Bare for ordens skyld

Naturligvis kan man også arbeide med tallfølger som gir for eksempel tredjegradsfunksjoner (osv). Da vil tredjedifferansen være konstant (osv).

Det er også verdt å nevne at enhver oppgave som bare angir de første leddene i noe som skal være en tallfølge, vil ha uendelig mange løsninger. For eksempel vil tallene i a), altså 2, 4, 6, 8,… også passe i formelen $P_n = n^4 - 10n^3 + 35n^2 - 48n + 24$. Denne følgen ser slik ut:

$$2, 4, 6, 8, 34, 132, \ldots$$

I eksemplene våre nøyer vi oss med å finne den "enkleste" tallfølgen og formelen som passer til de (tre) tallene som er oppgitt. Men OBS: Det er nyttig i eksemplene ovenfor, og de som kommer, å regne ut – og gjerne tegne – figur nummer 4 (og eventuelt flere etterfølgende).

Er du nysgjerrig på hvordan formelen i forrige avsnitt er konstruert? Den er laget ved å addere

$$(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$

til $2n$. Siden dette parentesuttrykket er 0 for de fire første $n$-verdiene, vil den formelen vi ender opp med, gi de samme fire første leddene som $2n$.

### 3.3.7 Oppgaver i utregning av eksplisitt formel for figurtall

Løsning ved bruk av **Metode 2** følger på side 36, men løs oppgavene selv først. Vær obs på at også andre metoder kan benyttes for å løse disse oppgavene, for eksempel er det ofte muligheter for å bruke **Metode 3**.

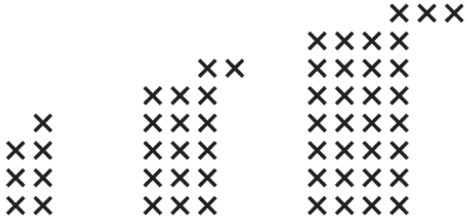
1. Trekantene nedenfor er satt sammen av streker/pinner – tre til hver trekant. De utvikler seg som et figurtall.

   a. Bestem eksplisitt formel for antall pinner.
   b. Bestem eksplisitt formel for antall trekanter.
   c. Hvor mange pinner er det i figur nummer 26?
   d. Hvor mange trekanter er det i figur nummer 13?

2. Sammensetning av prikkene nedenfor utvikler seg som et figurtall.

   a. Bestem eksplisitt formel.
   b. Hvor mange prikker er det i figur nummer 100?

3. Vi tenker oss at kryssene nedenfor utvikler seg som et figurtall og at hvert kryss er satt sammen av to pinner.



   a. Bestem eksplisitt formel for antall pinner.
   b. Hvor mange pinner er det i figur nummer 23?

## 3.4 Figurtall

1. Et figurtall utvikler seg slik:

```
                                              X
                           x             x x x x x
    x                  x x x x           x x x x x x
  x x x              x x x x x           x x x x x x x
```

    a) Tegn den neste figuren. Hvor mange kryss har den?
    b) Finn eksplisitt formel.
    c) Hva om det blir et ekstra kryss i den første, to i den andre osv..?

2. Et annet figurtall utvikler seg slik:

```
                                                            x x x x
                                    x x x                   x x x x
      x x                           x x x           x x x x x x x x
      x x                     x x x x x x         x x x x x x x x x
  x x x x                   x x x x x x x       x x x x x x x x x x
```

    a) Hvor mange kryss har den neste figuren?
    b) Finn eksplisitt formel.

3-7 Nedenfor kommer noen oppgaver der de tre første figurene er tegnet i form av kryss.
I hver av oppgavene skal du:

a) Tegne den neste figuren og angi hvor mange kryss den har.
b) Finne eksplisitt formel.

3.

```
                                               xxx
                           xx               xxxxxx
   x                     xxxx               xxxxxx
  xx                     xxxx               xxxxxx
```

4.

```
                                          xxxxx
                          xxxx            xxxxx
   xxx                    xxxx         xxxxxxxx
   xxx                  xxxxxx         xxxxxxxx
  xxxx                  xxxxxx         xxxxxxxx
```

5.

```
                                       xxxxxxx
                       xxxxx           xxxxxxx
  xxx                  xxxxx           xxxxxxx
  xxx                  xxxxx           xxxxxxx
```

6.

```
                                    xxxxx
                  xxxx              xxxxxxxx
xxx               xxxxxx            xxxxxxxx
xxxx              xxxxxx            xxxxxxxx
xxxx              xxxxxx            xxxxxxxx
```

7.

```
                                       xxxx
                     xxx           xxxxxxxx
  xx              xxxxxx           xxxxxxxx
xxxx              xxxxxx           xxxxxxxx
```

8. Prikkene nedenfor utvikler seg som et figurtall.

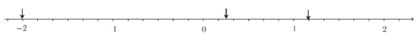
   a. Bestem eksplisitt formel for antall prikker.
   b. Hvor mange prikker er det i figur nummer 17?

9. Lag oppgaver selv. Angi de 3-4 første. Finn eksplisitt formel.
   F.eks: $T_n + K_n$ $\quad K_{n+2} + R_{n+1}$ $\quad R_{n+1} + T_n$ $\quad R_{n+2} + R_n$ $\quad K_{n+1} + K_{n+2}$ $\quad R_n + K_{n+2}$
   Og gjerne flere…
   Sjekk også hvordan det blir dersom du legger til ett, to, tre ekstra kryss osv, som i oppgave 1.
   Og hva hvis du legger til bare ett ekstra kryss i hver figur? Eller to, fire, seks osv?

# 4 Fasit

## 2 Repetisjonsoppgaver til Del 1 på skriftlig eksamen

### 2.1 Oppgaver relatert til Del 1 (fra side 3)

1. a) $\boxed{3} \cdot 10 + \boxed{8} \cdot \boxed{1}$ b) $1 \cdot \boxed{10} + \boxed{8} \cdot 1 + \boxed{9} \cdot \boxed{0{,}1}$ c) $\boxed{0} \cdot \boxed{0{,}1} + \boxed{4} \cdot \boxed{0{,}01}$ d) $1 \cdot \boxed{100} + 1 \cdot \boxed{10} + \boxed{5} \cdot 1 + \boxed{0} \cdot \boxed{0{,}1} + \boxed{2} \cdot 0{,}01 + \boxed{7} \cdot \boxed{0{,}001}$ e) 6020,04 f) firemillionerethundretusenogtjuetreogfiretidelerplussfemhundredeler g) 12012012,12
2. a) 204,9 b) 102460 c) 0,07
3. a) $\frac{2}{7}$ b) $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$ c) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{12}$ d) 3 millioner e) 0,0056
4. a) $\frac{33}{100} = 33\ \%$ b) $134\ \% = \frac{134}{100} = \frac{67}{50}\left(= 1\frac{17}{50}\right)$ c) $0{,}6 = 60\ \%$
   d) $\approx 233\ \% \approx 2{,}33$ e) $\frac{14}{100} = \frac{7}{50} = 0{,}14$ f) $2{,}222 = \frac{2222}{1000} = \frac{1111}{500}$
5. a) $37{,}5\ \% = \frac{3}{8} = 0{,}375$ b) $\frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx 67\ \% = 0{,}67$ c) $20\ \% = \frac{3}{15} = 0{,}2$
   d) $60\ \% = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0{,}6$ e) $\frac{12}{28} = \frac{3}{7} \approx 0{,}43 = 43\ \%$
6. a) 2,01 b) 20,14 c) 10,099 d) 83,02 e) 3,00 f) 19,10 g) 100,011
7. a) 30 % b) 862,50 kr c) 1600 kr
8. a) 0,1007 $cm^2$ b) 1,008 $dm^2$ c) 40100 $dm^3$ d) 424,04 L e) 0,4 $dm^2$
9. a)  b) 
10. a) $-0{,}3 = -30\% = -\frac{3}{10}$ $0{,}7 = 70\ \% = \frac{7}{10}$ $1{,}2 = 120\ \% = \frac{6}{5}$
    b) $-0{,}125 = -12{,}5\ \% = -\frac{1}{8}$ $0{,}25 = 25\% = \frac{1}{4}$ $0{,}875 = 87{,}5\ \% = \frac{7}{8}$
    c) $-\frac{2}{9} \approx -0{,}222 = -22{,}2\ \%$ $\frac{1}{9} \approx 0{,}111 = 11{,}1\ \%$ $\frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\ \%$ $\frac{8}{9} \approx 0{,}888 = 88{,}8\ \%$
11. a) 6 cm b) $\approx 85\ cm^2$ c) 2 dm d) $\frac{1}{3}$ dm e) 14 $cm^2$
12. a), b), c), d) gir samme (innbyrdes) svar
13. a) 130 kr b) 105,60 kr c) 312 kr
14. a) 11 b) −57 c) 11
15. Finner dere ut av selv.
16. a) 2 cm × 3 cm b) 6 cm × 6 cm c) $\frac{1}{3}$cm × $\frac{1}{2}$ cm d) 4 cm × 4 cm
17. a) 3 cm
18. Regneartene
    a) 2,976502 b) 1003,691 c) 7990 d) 7,218 e) 6 f) 250
19. Skriv neste tall: a) 1,2 b) 9,910 c) 1,0 d) 1,310 e) 15,25
20. a) $\frac{4}{100}$ b) $\frac{4}{10}$
21. Regn ut. Forkort hvis mulig:
    a) $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ b) $\frac{17}{28}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{63}{12} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$ e) $\frac{5}{7}$ f) $\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$ g) $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$
    h) $\frac{28}{40} = \frac{7}{10}$ i) $\frac{5}{6}$ j) $5\frac{1}{30}$ k) $\frac{55}{56}$ l) $-\frac{1}{15}$ m) $\frac{5}{6}$ n) f. eks. $\frac{3}{5}$ og $\frac{3}{14}$ o) $\frac{1}{24}$, $\frac{3}{20}$
22. Prosentregning: a) 800 kr b) 578 kr c) 2400 kr
23. Brøk, prosent, desimaltall: a) $\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ og 0,75 b) 0,8 og 80 % c) $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ og 40%
24. Parentes: a) $-2{,}5 \cdot 2 - 12 = -17$ b) 86,4 c) $-2{,}5 \cdot 2 - 7 = -12$

25. Geometri – omkrets, areal, volum: a) 4 cm, 4 cm, 12 cm b) $4 \cdot 5 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$
c) $\frac{5 \cdot 4}{2} \text{ cm}^2 = 10 \text{ cm}^2$ d) $\pi r^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 3 \approx 38 \text{ cm}^3$ e) $\frac{100 \text{ dm}^3}{20 \text{ dm}^2} = 5 \text{ dm}$
f) $(x+1) \cdot x = 56$ gir $x = 7$ cm, $x + 1 = 8$ cm (eller direkte: $8 \cdot 7 = 56$)
26. Omgjøring mellom enheter:
a) 1404 cm$^2$ b) 1250 dm$^2$ c) 1,4 dm d) 3,3 dL e) 950 mm$^2$ f) 100 dm$^3$
g) 30 dL h) 250 cm$^2$ i) 0,92 kg j) 120,14 dm k) 2,07 L l) 8,04 L
m) 243 cm n) 2,7 L
27. Tall i stigende rekkefølge: a) 0,012 0,1002 0,102 0,12 0,1201 0,212
b) 0,375 0,402 0,42 0,85 1,2 c) 0,069 0,6 0,604 0,64 0,641
d) $-0{,}401$ $-0{,}041$ 0,1041 0,4 0,41 0,4103
e) $\frac{1}{4}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{10}{16}$ $\frac{23}{24}$ f) $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{6}{7}$ $\frac{33}{35}$
28. Hvilken brøk er størst: a) $\frac{58}{59} > \frac{57}{58}$ b) $\frac{79}{80} > \frac{69}{70}$
29. Posisjonssystemet – riktig tall i rutene: a) 1 b) 0,01 c) 0 d) 0,7
30. a) $1200 \cdot 0{,}7 = 840$ kr b) $\frac{2800}{0{,}8} = 3500$ kr c) $\frac{800}{0{,}25} = 3200$ kr, betalte 2400 kr
31. a) $\frac{9}{0{,}6} = 15$ kr b) $30 \cdot 0{,}7 = 21$ kr c) $15 \cdot 1{,}6 = 24$ kr
32. a) 6 bananer b) 6 par hvite c) 35 klinkekuler

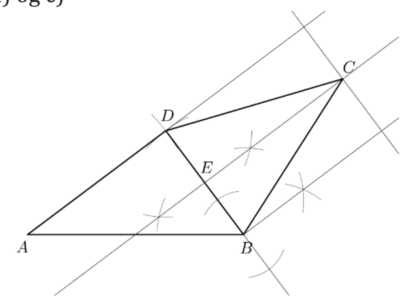
## 2.3 Brøk, prosent, desimaltall (fra side 14)

1. a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$
2. a) 30 % b) 75 % c) 40 % d) 250 %
3. a) 0,13 b) 0,25 c) 0,222… d) 2,143…
4. a) 0,15 b) 0,002 c) 0,8 d) 2,05
5. a) $\frac{3}{20}$ b) $\frac{1}{500}$ c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{41}{2000}$
6. a) $<$ b) $>$ c) $<$ d) $>$ e) $<$ f) $<$
7. a) 2 b) $3\frac{1}{24}$ c) $2\frac{7}{24}$ d) $1\frac{7}{24}$ e) $2\frac{7}{10}$ f) $2\frac{1}{10}$ g) $\frac{1}{10}$ h) $-\frac{1}{20}$
8. a) $\frac{1}{20}$ b) $\frac{8}{49}$ c) 1 d) $2\frac{37}{48}$ e) 3 f) 27 g) 3 h) $12\frac{1}{2}$
10. a) 20 % b) 30 % c) ≈14,3 % d) 12,5 % e) ≈42,9 %.
Tenk over hvordan du regner og hvorfor.
11.
a) 1 og 5 er korrekt. I 6 er svaret riktig, men hva er feil med framgangsmåten? Kommentarer gir du selv. Diskuter med andre. Spør hvis dere er usikre.
b) Den lager du selv. Diskuter med andre.
c) Tenk over det. Diskuter med andre. Spør hvis dere er usikre. (Stikkord: konkreter, tegning, målingsdivisjon.)
12. a) Nei b) Ja c) Ja d) Nei
13. $\boxed{12{,}5\ \%} = \boxed{0{,}125} = \frac{1}{8}$ $\boxed{80\ \%} = 0{,}8 = \boxed{\frac{4}{5}}$ $130\ \% = \boxed{1{,}3} = \boxed{\frac{13}{10}}$
14. a) 1275 b) 15 % c) 1500

# 3 Repetisjonsoppgaver til Del 2 på skriftlig eksamen

## 3.1 Geometri (fra side 16)

1. a) 4 cm  b) Omkrets 28 cm, Areal 36 $\text{cm}^2$
2. a) Trapes  b) Omkrets ca 49,33. Areal ca 82,25 ($BC \approx 9{,}43$ og $ED \approx 4{,}9$)[4]
3. a) Høyde 4,33 cm, Areal 34,6 $\text{cm}^2$ b) Som a) (Hva er forskjellen på figurene i a) og b)?)
   c) Omkrets 24 cm. Areal 28 $\text{cm}^2$. $AE = 3$ cm.
4. Ble det trapes? Flere løsninger? Hvordan presisere? Areal 18 $\text{cm}^2$. Omkrets 20,6 cm.
   (Siden $AD \approx 3{,}6$ cm) – Eller: Omkrets 23,7 cm ($AD \approx 6{,}7$ cm.)
5. a) Parallellogram c) Areal 70 $\text{cm}^2$. Omkrets 36,2 cm.
6. a) Rombe c) Areal 31,2 $\text{cm}^2$ (høyde ca 5,2 cm). Omkrets 24 cm.
   d) og e) Areal 312 000 $\text{m}^2 = 312$ mål $= 0{,}312\ \text{km}^2$. Omkrets 2 400 m $= 2{,}4$ km.
   (Merk at når du regner ut arealet er det to lengder som multipliseres.) f) $AE = 300$ m.
   Tenk 30-60-90 graders trekant.
7. b) Et kvadrat er både et rektangel, en rombe, et parallellogram, et trapes og en drake.
   Et rektangel er både et parallellogram og et trapes. (Et rektangel **kan** være både et kvadrat en rombe og en drake, hvis det er et kvadrat.)
   En rombe er både et parallellogram, et trapes og en drake.
   Et parallellogram er et trapes.
8. a) 180, 360, 540, 720 …
   b) Ser du sammenhengen?
   c) Rettvinklet, likebeint trekant. Areal 8 $\text{cm}^2$. Omkrets 13,7 cm. (Hypotenusen blir ca 5,7 cm.)
   d) Likebeint trekant – siden den siste vinkelen er 70 grader. Dermed er to av sidene like lange – altså 14 cm. (Det går an å regne ut areal og omkrets også, men det gidder vi ikke bry oss med nå.)
9. Målestokken er 1: 200. Omkrets i virkeligheten er 42 m.
10. Omkrets er ca 32,6 cm. Arealet er 29,5 $\text{cm}^2$.
11. c) Rombe e) Trapes f) Arealet er ca 32,5 $\text{cm}^2$ (høyde ca 4,33 cm). Omkretsen er 25 cm.
12. a) 4  b) 2  c) uendelig mange  d) sammensatt av speiling og parallellforskyving (etter valgfri rekkefølge).
13. a) og c)




b) Siden $AB^2 = AD^2 + BD^2$ gir Pytagoras at $\angle BDA = 90°$. Thales setning gir oss at $D$ ligger på en sirkel med diameter $AB$.
d)Midtnormalen gir oss alle punkter som har samme avstand fra $B$ som $D$.
e) Arealet av $ABCD = 12\ \text{cm}^2$
f) Omkrets av $ABCD = 9 + 2\sqrt{18{,}25}$ cm
$\approx 17{,}5$ cm.

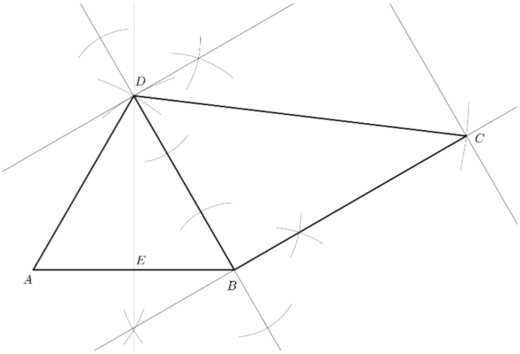
---

[4] Svarene på flere av oppgavene som følger, er gitt ut fra bruk av kalkulator. I noen av de følgende oppgavene vil det være greit å bruke kvadratrottegn i svaret, dersom du regner uten kalkulator. Da vil for eksempel svaret i 2 b) bli:

$$\text{Omkrets er } 35 + \sqrt{89} + \sqrt{24}$$

eller dere kan gjøre litt «grove» tilnærminger.

14. a), b) og e)

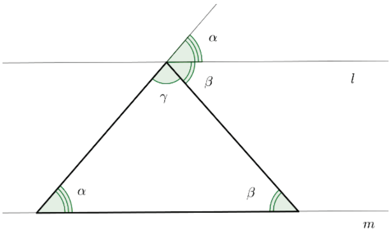



c)

$$\begin{aligned} DE^2 &= BD^2 - BE^2 \\ &= 6^2 - 3^2 \\ &= 27 \\ DE &= \sqrt{27} \approx 5{,}2 \text{ cm} \end{aligned}$$

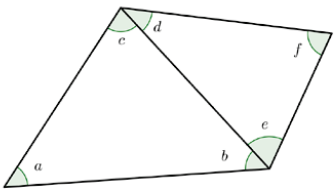
d) Areal av $ABD = 15{,}6 \text{ cm}^2$
Omkrets av $ABD = 18$ cm
f) Pytagoras: $6^2 + 8^2 = 10^2$
g) Areal av $ABCD = 39{,}6 \text{ cm}^2$
Omkrets av $ABCD = 30$ cm
h) En sirkel om $D$ med radius 10 cm vil også skjære parallellen med $AB$ i et punkt høyere opp på parallellen.

15. a) F. eks.




$l$ og $m$ er parallelle
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

b) Vi utvider til en «vilkårlig» firkant




$$a + b + c = 180°$$
$$d + e + f = 180°$$

Vinkelsummen i firkanten er da 360°.

c) Vi kan «hekte på» en ny trekant, og får at vinkelsummen i en femkant blir

$$360° + 180° = 540°$$

osv…

16. Omkretsen til $B$ er dobbelt så stor som omkretsen til $A$.
Arealet til $B$ er fire ganger så stort som arealet til $A$.
For et kvadrat som har omkrets $P$ og areal $Q$ så er

$$\left(\frac{P}{4}\right)^2 = Q.$$

Imidlertid er det ikke et sammenheng mellom areal og omkrets som holder for alle firkanter.

## 3.2 Andre tallsystemer (fra side 20)

2. I firetallsystemet: a) 1032 b) 123 c) 11322 d)12231 e) $43{,}5625_{10}$
   I femtallsystemet: a) 421 b) 134 c) 10041 d) 11004 e) $63{,}44_{10}$
3. I sekstallsystemet: a) 1254 b) 145 c) 33322 d) 34231 e) $173{,}7222\ldots_{10}$
   I syvtallsystemet: a) 1143 b) 156 c) 26316 d) 30234 e) $229{,}6122\ldots_{10}$
4. I åttetallsystemet: a) 1476 b) 167 c) 55322 d) 56231 e) $439{,}7656\ldots_{10}$
   I nitallsystemet: a) 1365 b) 178 c) 48086 d) 50014 e) $547{,}6790\ldots_{10}$
7. a) $224_{\text{seks}} = 88_{\text{ti}}$ b) $145_{\text{seks}} = 65_{\text{ti}}$ c) $10503_{\text{seks}} = 1479_{\text{ti}}$ d) $42_{\text{seks}} = 26_{\text{ti}}$
8. a) $1226_{\text{ni}} = 915_{\text{ti}}$ b) $568_{\text{ni}} = 467_{\text{ti}}$ c) $45366_{\text{ni}} = 30192_{\text{ti}}$ d) $68_{\text{ni}} = 62_{\text{ti}}$
9. a) Femtallsystemet b) Syvtallsystemet c) Nitallsystemet
10. $1112_{\text{fire}}$ (tilsvarer 86 i titallsystemet)
11. Her er det greit å prøve seg fram. $49_{\text{elleve}}$ tilsvarer $53_{\text{ti}}$ som er $311_{\text{fire}}$.
12. Svaret blir (i titallsystemet)
$$1 \cdot 125 + 2 \cdot 25 + 3 \cdot 5 + 4 + 1 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{1}{25} + 3 \cdot \frac{1}{125} + 4 \cdot \frac{1}{625} = 194{,}3104.$$
13. $55_{\text{ti}} = 110111_{\text{to}} = 313_{\text{fire}} = 131_{\text{seks}} = 67_{\text{åtte}}$
14. $148_{\text{ti}} = 12111_{\text{tre}} = 1043_{\text{fem}} = 301_{\text{syv}} = 174_{\text{ni}}$
15. a) $2465_{\text{åtte}}$ b) $21200_{\text{tre}}$ c) $283_{\text{ni}}$
17. a) $10101_{\text{to}}$ b) $1010_{\text{tre}}$ c) $1023_{\text{åtte}}$ d) $880_{\text{ni}}$
18. a) $102_{\text{tre}}$ b) $513_{\text{åtte}}$ c) $444_{\text{ni}}$
19. a) $100011_{\text{to}}$ b) $201021_{\text{tre}}$ c) $60434_{\text{åtte}}$ d) $71424_{\text{ni}}$
20. a) $111_{\text{to}}$ b) $202_{\text{tre}}$ c) $704_{\text{åtte}}$ d) $815_{\text{ni}}$
21. a) $2121_{\text{tre}}$ b) $456_{\text{åtte}}$ c) $456_{\text{ni}}$

## 3.3.7 Oppgaver i utregning av eksplisitt formel for figurtall (fra side 29)

I parentes i tabellene er antallet i $F_4$ satt inn. Tegn $F_4$. (Regn selv ut for $F_5$ og tegn gjerne figurtallet $F_5$.)

1. Det er tre streker/pinner i hver figur. Da kan vi lage en tabell som gir oversikt over utviklingen for antall sterker/pinner.
   a. Vi regner ut 1. og 2. differansen og $F_0$ – som tilsvarer c i den generelle 2. gradslikningen.

| Tall | $\boldsymbol{F_0}$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | … | $F_n$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tallverdi | **0** | 3 | 9 | 18 | (30) | | | |
| 1. differansen | | **3** | 6 | 9 | (12) | | | |
| 2. differansen | | **3** | 3 | (3) | | | | |

Her kan vi lese av at $c = 0\ (= F_0)$ og siden vi vet at $a$ er halvparten av 2. differansen, blir $a = \frac{3}{2}$. Da er: $F_n = \frac{3}{2}n^2 + bn + 0$. Vi setter inn for $n = 1$ og får $F_1 = 3 = \frac{3}{2} \cdot 1^2 + b \cdot 1$, som gir $b = \frac{3}{2}$. Formelen blir

$$F_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n.$$

b. Vi kan enten finne eksplisitt formel på tilsvarende måte som i a) eller vi ser at det er en tredel så mange trekanter som streker/pinner. Formelen blir

$$F_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n.$$

(Dette er formelen for trekanttallene, mens vi i a) har tre ganger så mange.)

c. Vi setter inn $n = 26$ i $F_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n$, og får 1053 pinner.

d. Vi setter inn $n = 13$ i $F_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$, og får 91 trekanter.

2.

a. Vi teller og lager en tabell for utviklingen:

| Tall | $\boldsymbol{F_0}$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | ... | $F_n$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tallverdi | **2** | 4 | 8 | 14 | (22) | | | |
| 1. differansen | **2** | 4 | 6 | (8) | | | | |
| 2. differansen | | **2** | 2 | (2) | | | | |

I tabellen kan vi lese av at $c = 2$ $(= F_0)$ og $a = 1$ (halvparten av 2. differansen). Da er $F_n = n^2 + bn + 2$. Vi setter inn for $F_1$ og får $4 = 1 \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 2$, som gir $b = 1$. Formelen blir

$$F_n = n^2 + n + 2.$$

b. I figur nummer 100 er det $100^2 + 100 + 2$ streker, dvs 10102 streker.

OBS: Set vi godt etter, oppdager vi kanskje at $F_n = R_n + 2 = n(n+2) + 2 = n^2 + n + 2$.

3. Vi teller og lager tabell:

| Tall | $\boldsymbol{F_0}$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | ... | $F_n$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tallverdi | **1** | 7 | 17 | 31 | (49) | | | |
| 1. differansen | **6** | 10 | 14 | (18) | | | | |
| 2. differansen | | **4** | 4 | (4) | | | | |

Vi ser at $c = 1$ og at $a = 2$.
$F_1 = 7 = 2 \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 1$ gir at $b = 4$. Formelen blir da:

$$F_n = 2n^2 + 4n + 1.$$

Antall pinner i $F_{23}$ blir $2 \cdot 23^2 + 4 \cdot 23 + 1 = 1151$ streker.

Kanskje ser vi her at vi har rektangel $n$, kvadrattall $n + 1$ og et tillegg som starter med 1 og deretter øker med 1 for hver figur? Da kan vi bruke formelen

$$F_n = n(n+1) + (n+1)^2 + n.$$

Vi får $F_n = n^2 + n + n^2 + 2n + 1 + n$, som også gir $F_n = 2n^2 + 4n + 1$. (Beregning her gir god trening!)

## 3.4 Figurtall (fra side 30)

1. a) 31 b) $F_n = K_n + T_{n+1} = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$ c) $F_n = K_n + T_{n+1} + n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + 1$

2. a) 56 b) $F_n = T_n + K_n + R_{n+1} = \frac{5}{2}n^2 + \frac{7}{2}n + 2$
3. a) 36 kryss b) $F_n = 2n^2 + n$
4. a) 52 kryss b) $F_n = 2n^2 + 4n + 4$
5. a) 45 kryss b) $F_n = 2n^2 + 3n + 1$
6. a) 56 kryss b) $F_n = 2n^2 + 5n + 4$
7. a) 45 kryss b) $F_n = 2n^2 + 3n + 1$ (Oppg. 7 tilsvarer oppg. 5.)
8. Vi teller og lager tabell:

| Tall | $\boldsymbol{F_0}$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | ... | $F_n$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tallverdi | **8** | 10 | 16 | 26 | (40) | | | |
| 1. differansen | | **2** | 6 | 10 | (14) | | | |
| 2. differansen | | **4** | 4 | (4) | | | | |

Vi ser at $c = 8$ og at $a = 2$.

$$F_1 = 10 = 2 \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 8$$

Det gir $b = 0$, og formelen blir

$$F_n = 2n^2 + 8$$

Antall prikker i $F_{17} = 2 \cdot 17^2 + 8 = 586$ prikker.
OBS: Ser vi godt etter, finner vi kanskje at $F_n = 2K_n + 8 = 2n^2 + 8$.